A propos de la multiplication

I) Quelques définitions de la multiplication avant les maths modernes

1) La multiplication en Cours Moyen en 1910 : Brouet et Haudricourt[1]

	Sens de l'opération 68.- La **multiplication** est une opération par laquelle on répète un nombre appelé **multiplicande** autant de fois que l'indique un autre nombre appelé **multiplicateur**. Le résultat se nomme **produit**. On définit encore la multiplication ainsi : 69. – la multiplication est une opération qui a pour but de trouver un nombre appelé **produit** qui soit par rapport au **multiplicande** ce que le **multiplicateur** est par rapport à l'**unité**. 70. - Le multiplicande et le multiplicateur se nomment les **facteurs** du produit. 71. - La multiplication s'indique par le signe **×** (**multiplié par**) qui s'écrit entre les nombres à multiplier : 8 × 5 (*8 multiplié par 5*). 72. - La multiplication n'est qu'une *addition abrégée*. 73.- Le *multiplicande* est toujours un nombre *concret*, c'est-à-dire qui exprime des objets déterminés, comme des arbres, des mètres, des francs, etc. 74.- Le *multiplicateur* est un nombre *abstrait*, qui indique seulement combien de fois on répète le multiplicande. 75.- Le *produit* exprime toujours des **unités** *semblables* à celles du multiplicande. **Technique de l'opération** ….	

[1] Brouet et Haudricourt Frères, *Arithmétique et système métrique Cours Moyen*, Librairies-Imprimeries réunies, Paris, 1912, 346 pages. Page 33.

2) La multiplication en Cours Elémentaire (programme de 1923) : Royer et Court[2]

52e leçon. ***Arithmétique.***

LA MULTIPLICATION

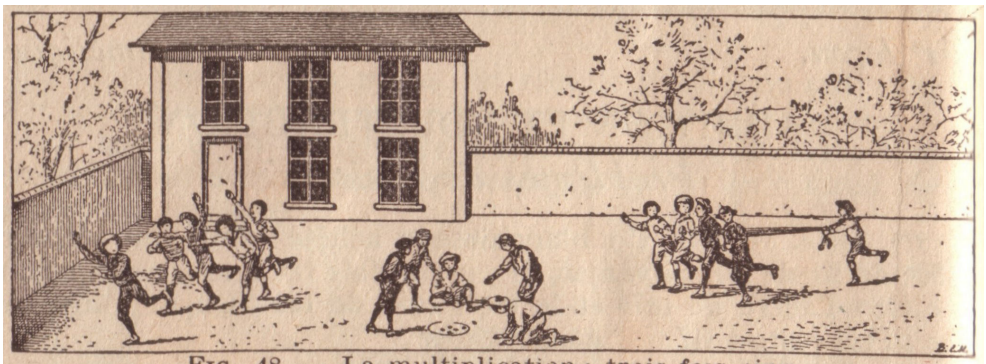


FIG. 48. — La multiplication : trois fois cinq.

100. *Problème* .- ***Observez la gravure ci-dessus. Combien voyez-vous de groupes d'élèves ? Combien y a-t-il d'élèves dans chaque groupe ? Combien y a-t-il d'élèves en tout dans la cour?***

Les 3 groupes contiennent:

5 élèves + 5 élèves + 5 élèves = 15 élèves.

Dans cette ***addition de nombres égaux***, ***le nombre 5 élèves est répété 3 fois*** ou, comme on dit, ***multiplié par 3***.

On dit plus rapidement: 3 fois 5 élèves font 15 élèves, ce qu'on écrit :

5 élèves × 3 = 15 élèves.
(multiplicande × multiplicateur = produit).

Cette addition particulière est une multiplication.

101. - ***La multiplication est une addition abrégée de nombres égaux.***
Le multiplicande est le nombre que l'on répète. Le multiplicateur est le nombre de fois que l'on répète le multiplicande.
Le produit est le résultat de la multiplication.

MULTIPLICANDE ET MULTIPLICATEUR N'ONT QU'UN CHIFFRE.

102. PROBLEME. - Il faut 6 carreaux pour vitrer une fenêtre (fig. 48). Combien faut-il de carreaux pour vitrer 5 fenêtres semblables ?
Il faut 5 fois 6 carreaux ou 30 carreaux, ce qu'on écrit :

6 carreaux × 5 = 30 carreaux.

Pour faire des multiplications semblables, il suffit de savoir par cœur la *table de multiplication* (voir Calcul mental).

[2] Maurice Royer et Planel Court, Arithmétique, Cours élémentaire, librairie Armand Colin, 43ème édition, 1923, 200pages. Page 76-77.

3) Multiplication en CM (1940 - programme de 1923) Royer et Court

MULTIPLICATION

111. — Sens de l'opération. — *Voici un groupe d'élèves rangés par 3 rangs de 4 élèves (fig. 94). Il y a 3 rangs. Quel est le nombre d'élèves ?*

Fig. 94. — 4 élèves × 3.

Le nombre cherché est le total de 3 nombres égaux à 4 élèves, soit : (4 + 4 + 4) élèves, total 3 fois 4 élèves ou 4 × 3 = 12 élèves, expression qui se lit :

4 *multiplié par* 3 *égale* 12.

112. — On appelle *multiplication* cette *addition particulière de nombres égaux*. Le résultat est appelé *produit*. Le nombre ainsi répété dans l'addition est le *multiplicande;* le nombre qui indique combien de fois il faut répéter le multiplicande se nomme *multiplicateur*. *Multiplicande* et *multiplicateur* sont les *facteurs du produit*.

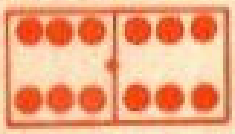
113. — Définition. — ***La multiplication a pour but, étant donnés deux nombres, l'un appelé multiplicande, l'autre multiplicateur, d'en trouver un troisième appelé produit, qui soit la somme d'autant de nombres égaux au multiplicande qu'il y a d'unités au multiplicateur.***

114. — Remarques. — 1. Le *multiplicateur*, indiquant le nombre de fois qu'il faut ajouter le multiplicande, *est toujours un nombre abstrait*.

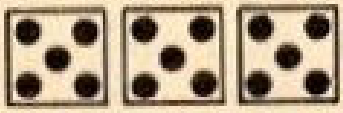
2. Le *produit*, étant la somme de plusieurs nombre égaux au multiplicande, *est de la même espèce que le multiplicande*.

4) La multiplication en CE en 1950 - programmes de 1945(CE Vassort)

Multiplier



2 fois 6
6 + 6



3 fois 5
5 + 5 + 5

4 fois 5
5 + 5 + 5 + 5

On n'écrit pas 5 cerises + 5 cerises + 5 cerises + 5 cerises = 20 cerises
mais **5 cerises** × **4** (fois) = **20 cerises**

- Un bouton coûte 10 F. Combien **coûtent** 4 boutons?
- Une planche mesure 8 m. Combien **mesurent** 5 planches semblables placées bout à bout?
- Un sachet de graines pèse 15 g. Combien **pèsent** 4 sachets?

Pour chercher → le prix total ou
→ la longueur totale ou
→ le poids total

de plusieurs objets identiques
le plus souvent, on fait une ***multiplication***

- Poser les multiplications des problèmes suivants en écrivant ce que représente chaque nombre.

(F en 1 heure) (heures)
exemple : **42** × **2** =

280. — Un apprenti gagne 42 F en 1 heure. Combien gagne-t-il en 2 heures?

281. — Si on peut mettre 11 lapins dans une caisse, combien mettrait-on de lapins dans 4 caisses semblables?

282. — Une femme de ménage travaille 8 heures par jour. Quel est le nombre d'heures de travail pour 4 jours?

283. — Mon oncle me donne 20 F par semaine. Combien ai-je touché au bout de 3 semaines?

II) Petits documents sur l'écriture des opérations

Pour diverses raisons et pas seulement parce que le calcul sur les grandeurs et la traduction que l'on en fait dans l'écriture des opérations sont des questions difficiles, il n'y a jamais eu à ma connaissance de positions complètement élaborées sur le sujet et même plutôt des positions contradictoires (la position des IO de 45 citée est bien que, lorsque l'on écrit 2 m + 3 m , on ne fait pas d'opérations sur les grandeurs). La position de 70 supprime la difficulté en disant qu'elle n'existe pas et le dernier document d'accompagnement des programmes, notamment, propose d'écrire les unités dans les opérations alors que les programmes de 2002 ne mentionnent pas l'existence de calcul sur les grandeurs quand ils énumèrent les différents types de calcul.

1) 1887 : Article Géométrie du Dictionnaire pédagogique (P. Leysenne)

« Il ne faut pas se borner à dire, comme on le fait trop souvent, que 5 m × 4 m font 20 mètres carrés, et que 5m × 4 m × 2 m font 40 mètres-cubes, ce qui n'a aucun sens. I1 faut répéter à satiété aux enfants que dans une multiplication, le produit est toujours de même nature que le multiplicande et le multiplicateur est toujours abstrait, en sorte que l'on ne peut multiplier 5 mètres par 4 mètres, et qu'en tout cas, si le multiplicateur était pris comme il devrait l'être, le produit représenterait des mètres et non des mètres carrés. II faut donc montrer à l'enfant, sur une figure, que le rectangle de 5 mètres de base et de 4 mètres de hauteur se décompose en 4 tranches qui contiennent chacune 5 mètres carrés, en sorte que le rectangle contient bien 4 fois 5 m² , c'est-à-dire 20m². »

2) Ecriture dans le cahier de Paul Guionie en 1937 :

Le volume de l'eau déplacée est de :
$1\ dm^3 \times 5 \times 10 \times 3 = 750\ dm^3$

3) IO de 45 (Cours Elémentaire)

Quand les élèves notent une multiplication, dans leur solution, il leur est utile de rappeler la signification concrète de chaque nombre. Par exemple, ils pourront écrire

(f par kg)		*(kg)*	
75	×	*5*	*= 375 francs ;*

(f par heure)		*(heure)*	
25	×	*42*	*= 1050 francs ;*

Le signe × comme le signe + et le signe – n'indique que l'opération à faire sur les nombres et non sur les grandeurs.

III) Une justification raisonnée des diverses écritures de la multiplication des grandeurs

On peut assez facilement montrer que toutes les multiplications des grandeurs[3]

[3] Enseignées en primaire, bien sûr…

- doivent être enseignées d'abord à partir de la forme classique qui traduit les définitions que l'on trouve dans les deux premiers exemples de la partie I (sauf la définition 69 du premier exemple) : *Multiplicande × Multiplicateur = Produit* ou "*a* ***u*** × *n* = *p* ***u***"
- peuvent toutes se ramener à celle- ci et à ce que j'appelle[4] les trois égalités canoniques
- a ***u*** = a × 1 ***u***. *(première égalité canonique)*
- ***1m × 1m = 1 m²*** *(deuxième égalité canonique)*
- ***1 m × 1 m × 1 m = 1 m × 1 m² = 1 m³*** *(troisième égalité canonique)*

1) Changement d'unités

D'un strict point de vue pédagogique, il n'est pas inutile d'introduire *subrepticement* à propos des exercices de conversion l'égalité suivante :

a ***u*** = a × 1 ***u***. *(première égalité canonique)*

On peut procéder de la manière suivante :
Pour convertir 23 km en m , on fait écrire à l'élève la valeur du kilomètre en mètres :

1 km = 1000 m

puis

23 km = 23×1 km

(intuitivement et sans explications, il est tout à fait évident que *23 kilomètres* représente exactement la même chose que *23 fois un kilomètre* et, pour l'élève cette égalité n'est peut-être pas une multiplication puisqu'elle est écrite « à l'envers »)

puis remplacer 1 km par sa valeur en mètres et effectuer l'opération :

23 km = 23×1 km = 23×1000 m = 23 000 m.

L'intérêt de cette démarche est double

- elle permet de ne pas limiter le exercices de conversion à l'utilisation des tableaux de conversion dont l'utilisation exclusive n'apprend rien et finit par faire croire à l'élève que la conversion est une opération magique qui n'a rien voir avec le calcul
- elle introduit une démarche algébrique qui est le changement de variable

2) Toutes les multiplications[5] se ramènent à "a ***u*** *× n = p* ***u****"*

Comment peut-on résumer formellement ce qu'est une multiplication ?

Si l'on additionne *n* fois la quantité *a**u*** – *n* fois *a* ***u*** - , ***u*** étant l'unité choisie pour compter ou mesurer *a* ***u*****,** cette somme de *n* termes chacun égal à *a* ***u*** , naturellement exprimée dans la même unité ***u***, est le produit *p* ***u*** et la notation correspondante est, *a* ***u*** étant le multiplicande et *n* le multiplicateur :

a ***u*** × *n* = *p* ***u***

La première chose à démontrer est que, dans le cadre de l'enseignement primaire, on peut ramener toutes les multiplications à cette forme sur la base de la distinction entre *multiplicande* et *multiplicateur* , c'est-à-dire de la reconnaissance du fait que l'un, nombre concret, représente la

[4] Le terme m'avait été donné il y quelques années par JP Bourguignon
[5] …étudiées à l'école primaire, bien sûr

quantité répétée tandis que l'autre, nombre abstrait, représente le nombre de fois qu'est répété cette quantité.

a) Le cas des "quantités unitaires" (cas $a\,\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}} \times n\,\boldsymbol{v} = p\,\boldsymbol{u}$)

Lorsque l'on achète 5 kg de pommes de terre , chaque kg coûtant 3€, le prix total est :

3€ + 3€ + 3€ + 3€ + 3€ = 3€ × 5 = 15 €.

Dans cette présentation du calcul,
- le poids n'apparaît pas ici en tant que nombre concret 5 kg mais en tant que nombre abstrait
- le prix 3€ apparaît comme prix alors qu'en fait il s'agit d'un prix unitaire, c'est-à-dire le prix de 1kg de pommes de terre que l'on peut écrire donc 3 €/kg (trois euros par kg)

On peut donc aussi écrire que le prix de 5 kg de pommes de terre à 3€ le kg est

3 €/kg × 5 kg

Dans ce cas, la logique algébrique du calcul sur les grandeurs permet d'écrire :

3 €/kg × 5 kg =
(3× 1 €/kg) × (5×1 kg)
3×5 ×(1 €/kg × 1 kg) =
$15 \times \left(\frac{1€}{kg} \times 1\text{ kg}\right) =$
15× 1 € = 15 €

Bien sûr, la présentation de ce calcul est surtout destinée à l'enseignant et ne doit être faite aux élèves que lorsqu'ils en maîtrisent l'ensemble des prérequis non pas obligatoirement de manière théorique mais au moins intuitive ce qui pourrait se situer au mieux en fin de CM2 ou plus probablement au moins au niveau sixième / cinquième d'un curriculum rénové dans lequel les 4 opérations sur les fractions seraient étudiées dés le CM (<u>Il n'est peut-être pas utile que les élèves connaissent</u> $\frac{a}{b} \times b = a$ <u>pour écrire 3 €/kg × 5 kg = 15 €</u>) .

De la même manière , la distance parcourue en 5 heures par un piéton qui parcourt 3 km en 1heure peut être au choix écrite sous la forme

3 km × 5 = 15 km
ou
3 km/h × 5h = 15 km (cette écriture correspondant plutôt à un énoncé du type "un piéton qui marche à une *vitesse* de 3 km/h")

qui permet une écriture en termes d'opération sur les grandeurs qui traduit exactement (ou au moins beaucoup mieux que 3×5 =15) :

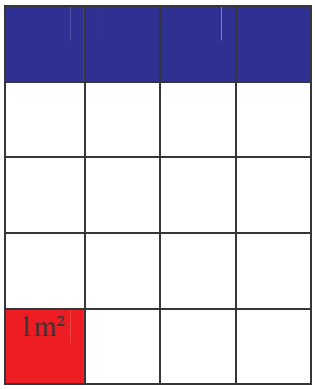
Le produit d'une vitesse par une durée est une distance
Vitesse × Durée = Distance

Il en serait de même de tous les problèmes qui utilisent des "grandeurs quotients", les problèmes de débit, d'alliages….

b) Le cas des aires et des volumes (cas a***m***×b***m***, , a***m²***×b***m***)

Les principe de base en analyse dimensionnelle sont ici :

- le produit d'une longueur par une longueur est une aire
- le produit d'une aire par une longueur est un volume

Calculs d'aire	
Prenons un exemple pour le calcul d'aire : pour apprendre à un enfant à calculer l'aire d'un rectangle il ne faut évidemment pas *commencer* par lui assener , bien que ce soit tout à fait vrai, " le produit d'une longueur par une longueur est une aire", ou même plus simplement comme le disait Pierre Leysnne "*5m × 4m font 20 mètres carrés*". Poursuivons avec Leysenne : "*Il faut répéter à satiété aux enfants que dans une multiplication, le produit est toujours de même nature que le multiplicande et le multiplicateur est toujours abstrait…. Il faut donc montrer à l'enfant, sur une figure, que le rectangle de 5 mètres de base et de 4 mètres de hauteur se décompose en 4 tranches qui contiennent chacune 5 mètres carrés, en sorte que le rectangle contient bien 4 fois 5m², c'est-à-dire 20m².*"[6]	 Ce qui correspond à l'écriture : 4m²×5= 20 m² ou 5 m²×4= 20 m².

L'aire du rectangle se traduit donc par l'égalité: 4m²×5= 20 m².

Une fois que l'on a dit que *l'aire du rectangle est égale au produit de sa longueur par sa largeur*, on peut essayer de traduire cette affirmation en calcul , sa traduction littérale étant :

$$A = 5m \times 4m$$

D'où :

	5m×4m	= (5× 1m)×(4×1 m)	*Première égalité canonique*
		= (5×4)×(1m×1m)	*La valeur d'un produit ne dépend pas de l'ordre de ses facteurs*
		= 20×(1m×1m)	*On effectue un produit partiel*
	Mais	20 m² = 20× 1 m²	*Première égalité canonique*
	Donc :	20×(1m×1m) = 20×1 m²	*Car ce sont deux écritures de la même aire*
	et	1m×1m = 1 m²	

On obtient donc obligatoirement :

1m × 1m = 1 m² *(deuxième égalité canonique)*

que l'on peut traduire (à moins que l'on ait introduit avant – "expérimentalement" - cette formulation) :
"*Quand on multiplie des mètres par des mètres, on trouve une aire ou des mètres carrés*"

[6] Article *Géométrie* déjà cité.

Le même type de raisonnement, suivant effectivement les différents comptages possibles du nombre de dm^3 dans un pavé droit donné, s'appuyant sur les deux premières égalités canoniques, aboutirait à :

$$\boldsymbol{1\ m \times 1\ m \times 1\ m = 1\ m \times 1\ m^2 = 1\ m^3} \textit{(troisième égalité canonique)}$$

dont la formulation peut être :

"*Quand on multiplie des mètres par des mètres carrés, on trouve un volume ou des mètres cubes*"[7]

Dans tous les cas, les multiplications "du primaire" peuvent donc se ramener à la multiplication $a\ \boldsymbol{u} \times n = p\ \boldsymbol{u}$. Et celle-ci, non pas sous cette forme mais par exemple sous celle présentée dans la leçon supra, doit toujours être enseignée explicitement.

[7] Ceci permet ensuite d'introduire, à propos du pavé droit, la formule générale pour tous les cylindres au sens large :

Volume = Aire de base × hauteur.

ANNEXE : multiplication graphique

Le but de cette annexe est, en prenant la multiplication, de donner un exemple, à la Laisant, de la liaison entre la géométrie et le calcul sur papier quadrillé, ce qui est peu fait dans les manuels de toute époque. A la fin de cet annexe, un but secondaire est de donner une réponse élémentaire à la question que se posait déjà l'élève Stendhal [8] : pourquoi « moins par moins donne plus » ?

Il me semble en effet important, outre les bonnes raisons que donne *C-A Laisant*, d'employer le papier quadrillé comme représentation du plan car il faut attendre un bon moment dans la scolarité pour comprendre que le plan est continu, c'est-à-dire qu'il ne s'agit pas d'un quadrillage très fin ; en ce sens , son emploi en primaire est au début du secondaire est de plus une excellente introduction à la géométrie des coordonnées.

Un autre but est, comme le dit Rudolf, de *commencer par les deux bouts* en donnant un exemple de formation qui n'est pas ce qu'il faut enseigner en primaire (bien qu'une partie puisse l'être).
Je m'appuie entre autres sur *La Géométrie* de René Descartes, publié en annexe du *Discours de la méthode* dont voici le début :

DES PROBLÈMES QU'ON PEUT CONSTRUIRE SANS Y EMPLOYER QUE DES CERCLES ET DES LIGNES DROITES.

Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connoître la longueur de quelques lignes droites pour les construire.

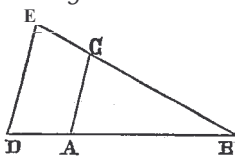
Comment le calcul d'arithmétique se rapporte aux opérations de géométrie

Et comme toute l'arithmétique n'est composée que de quatre ou cinq opérations, qui sont, l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, et l'extraction des racines, qu'on peut prendre pour une espèce de division, rapporte aux ainsi n'a-t-on autre chose à faire en géométrie touchant les lignes qu'on cherche pour les préparer à être connues, que leur en ajouter d'autres, ou en ôter; ou bien en ayant une, que je nommerai l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, et qui peut ordinairement être prise à discrétion, puis en ayant encore deux autres, en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'autre est à l'unité, ce qui est le même que la multiplication; ou bien en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'unité est à l'autre, ce qui est le même que la division; ou enfin trouver une ou deux, ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'unité et quelque autre ligne, ce qui est le même que tirer la racine carrée ou cubique, etc. Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'arithmétique en la géométrie, afin de me rendre plus intelligible.

La multiplication

Soit, par exemple, AB *(fig. 1)* l'unité, et qu'il faille multiplier BD par BC,

Fig. 1.



je n'ai qu'à joindre les points A. et C, puis tirer DE parallèle à CA, et BE est le produit de cette multiplication.

La division

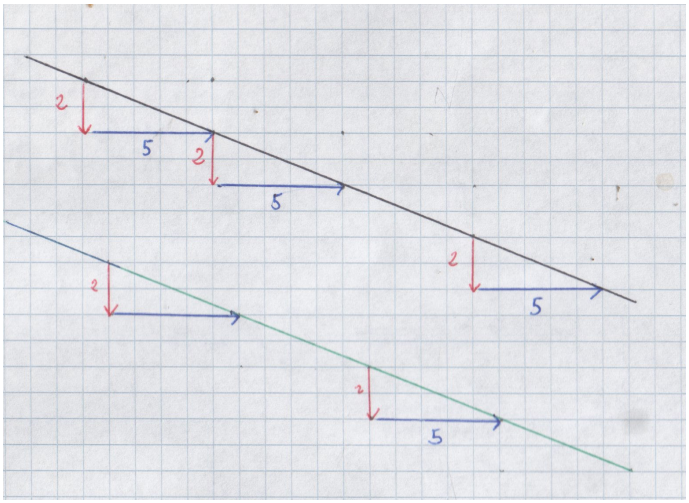
Ou bien, s'il faut diviser BE par BD, ayant joint les points E et D, je tire AC parallèle à DE, et BC est le produit de cette division.

On peut également consulter :
- « *Le calcul segmentaire basé sur le théorème de Pascal* », pages 81 à 87 des *Fondements de la géométrie* de David Hilbert (Dunod 1971) dans laquelle on trouve une démonstration de la commutativité de la multiplication segmentaire
- l'exposé de Klaus Hoechsmann sur la géométrie à Banff en décembre 2004 (mais je ne trouve plus l'adresse)
- Commentaires de Ralph Raimi sur "The role of axiomatics and problem solving in mathematics", The Conference Board of the Mathematical Sciences, 1966, http://www.math.rochester.edu/people/faculty/rarm/lax.html
- « *Why does a negative × a negative = a positive?*" de Richard Askey dans "Knowing and teaching elementary mathematics" http://www.aft.org/pubs-reports/american_educator/fall99/amed1.pdf

[8] Malgré la conclusion particulièrement stupide de l'auteur Anne Boyé, IREM de Nantes *[Il faut peut-être aussi se convaincre que les mathématiques servent à résoudre des problèmes théoriques ou abstraits, et non des problèmes concrets*], le texte donne la citation tirée de *La vie de Henry Brulard* et une bonne compilation de positions de mathématiciens sur cette question. http://nti.educa.rcanaria.es/penelope/confnomneg.htm

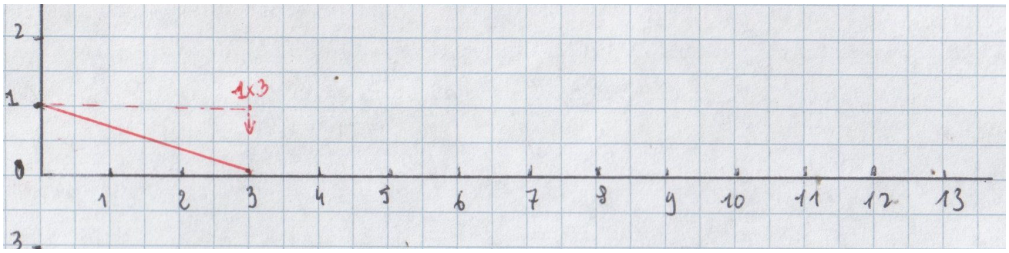
I) Parallèles et quadrillage

Il s'agit ici de constater que si, dans deux escaliers, les marches ont la même taille, les droites noires et vertes qui passent par les arêtes des marches sont parallèles, ce qui donne le moyen de construire deux droites parallèles



II Droites parallèles et multiplication

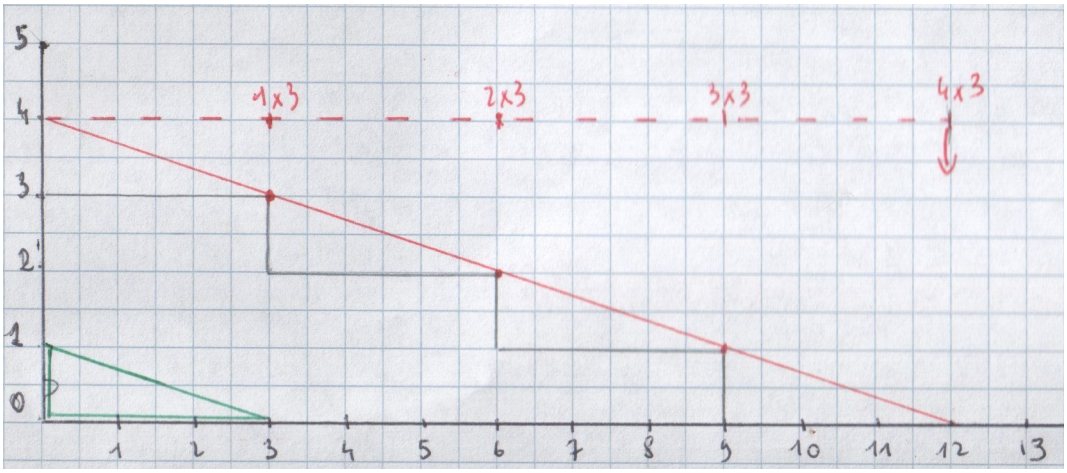
a) En « expliquant »



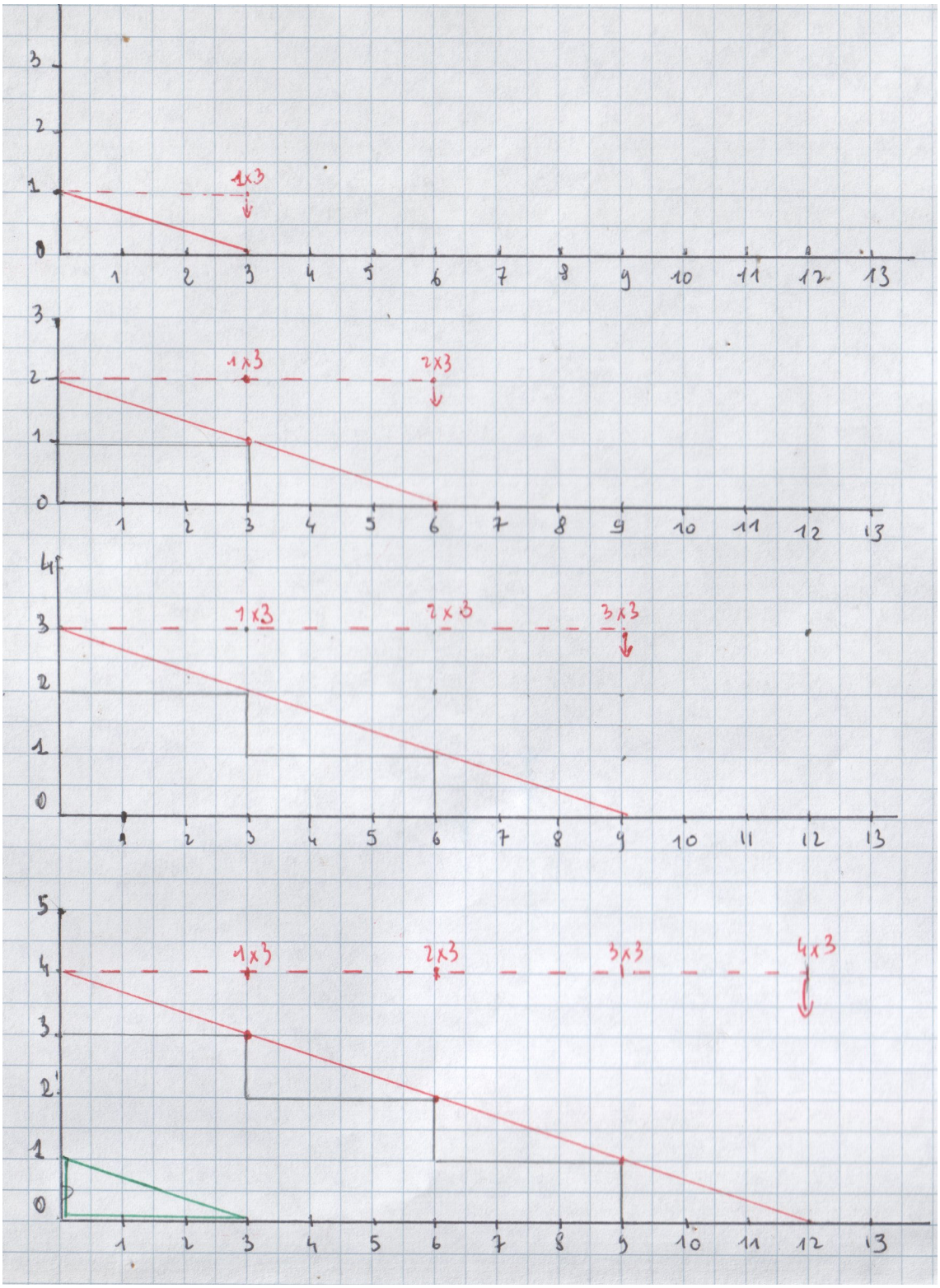
On peut construire ainsi 1 fois 3, c'est-à-dire, constater qu'en partant horizontalement de (0 , 1), en comptant 3 unités et en prenant le point de l'axe horizontal situé à la verticale , on a bien 3.

On répète le processus , par exemple pour 4 fois 3, ce qui revient à établir la règle géométrique suivante :

Pour dessiner 4 fois 3, on reporte, à partir du point 4 sur l'axe vertical, le triangle vert autant de fois que nécessaire (en fait 4 fois) pour que la droite rouge recoupe l'axe horizontal et on lit, à l'intersection de la droite rouge et de l'axe horizontal, le résultat de 4 fois 3.
D'après le I) , par construction, la droite rouge et l'hypoténuse du triangle vert sont parallèles.

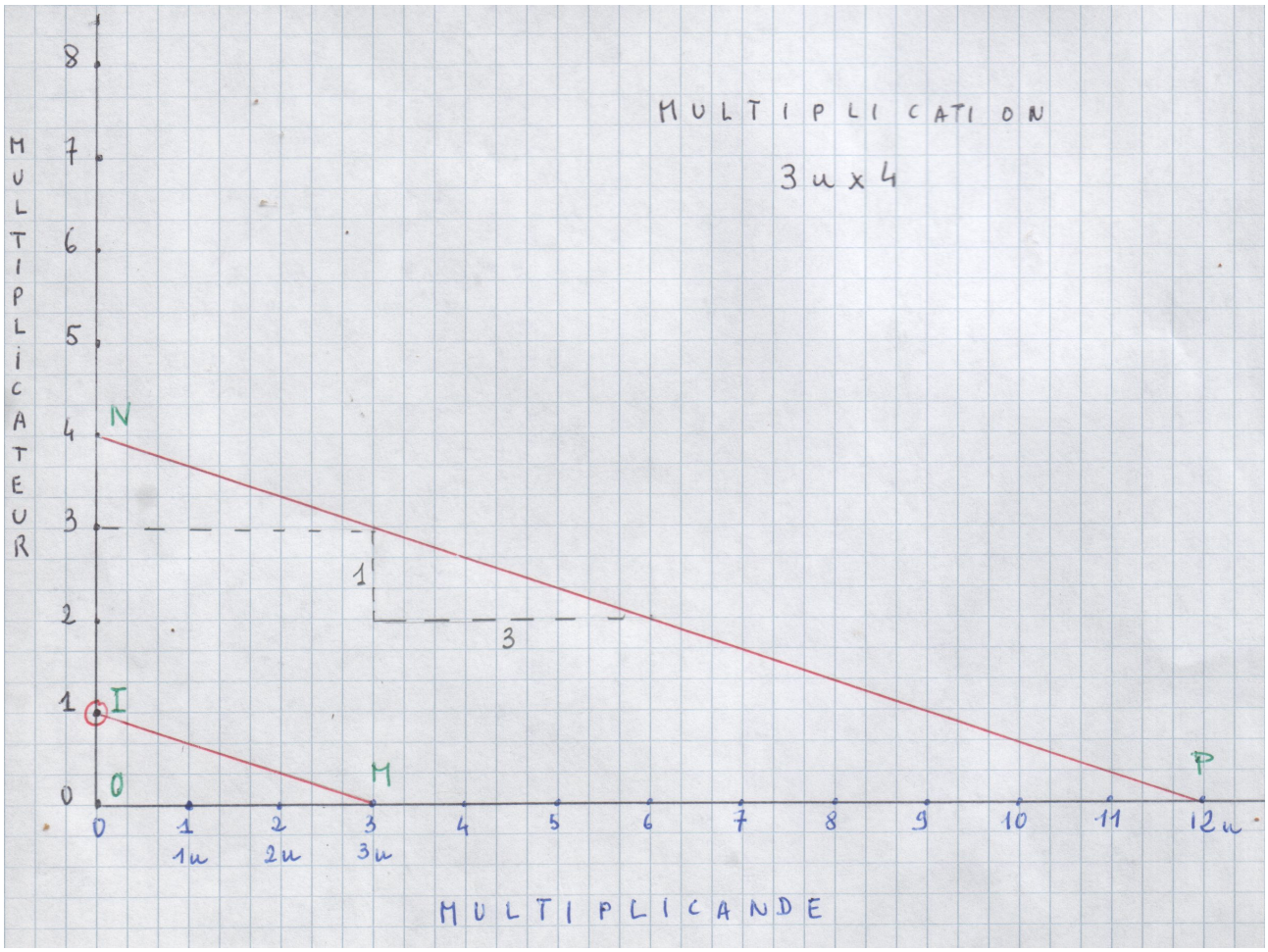


Ou, en développant :



b) Méthode plus dogmatique :

Pour calculer 4 fois 3u, *3u × 4*,
- le point I correspondant au multiplicateur 1
- M correspondant au multiplicande 3u et N au multiplicateur 4
- on trace la parallèle à la droite IM passant par N
- elle coupe l'axe des multiplicandes en P qui donne la valeur du produit recherché



La « vraie » démonstration est basée sur le théorème de Thalés (u étant l'unité choisie, le point N correspondant au nombre a , le point M correspondant au nombre b u et p étant le nombre concret correspondant au produit) :

Comme (IM) est parallèle à (NP), $\frac{OP}{OM} = \frac{ON}{OI}$, c'est-à-dire $\frac{p}{bu} = \frac{a}{1}$, d'où $p = bu \times a$.

L'intérêt de la chose n'est pas que ce soit la « *vraie* » démonstration ou pas mais que la formule $\frac{p}{bu} = \frac{a}{1}$ corresponde exactement à la deuxième définition de la multiplication donnée dans les manuels des années 20 qui était ***Le produit est au multiplicande ce que le multiplicateur est à l'unité*** , autrement dit le produit et le multiplicande sont dans le même rapport que le multiplicateur et l'unité (abstraite) ou , selon Descartes « *en ayant encore deux autres [lignes], en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'autre est à l'unité, ce qui est le même que la multiplication* ». Dit le plus simplement possible, dans la multiplication 4m × 3 = 12 m, le rapport de 12 m à 4 m est bien un rapport de 3 à 1. Or même si cette définition de la multiplication est peut-être délicate à introduire en primaire, sa compréhension y serait bien préparée par la compréhension de la propriété suivante de la multiplication (qui n'intéresse plus personne puisque … *ce n'est pas un axiome d'anneau*) : *Si l'on multiplie [resp. divise] un facteur d'un produit par un nombre, le produit est multiplié [resp. divisé] par ce nombre*.

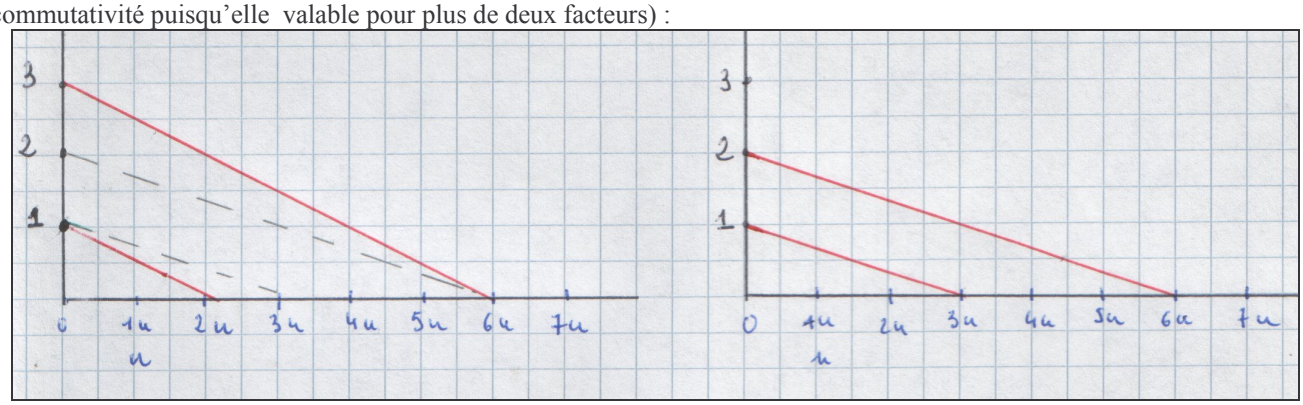
c) Quelques commentaires sur cette construction :

i) Quelle que soit la manière dont on s'y prenne, le produit ne se trouve pas sur le même axe que le point I, c'est-à-dire que

- si l'on veut dessiner le produit 4× 3 , si l'on choisit de commencer par 4 , on est obligé de placer I sur l'axe qui ne contient pas 4 et le produit se trouve sur l'axe qui contient 4
- si l'on veut dessiner le produit 4× 3 , si l'on choisit de commencer par 3 , on est obligé de placer I sur l'axe qui ne contient pas 3 et le produit se trouve sur l'axe qui contient 3

Ceci traduit bien le fait que l'on est obligé de particulariser un des facteurs du produit qui est de même nature que le produit, autrement dit, sur cette image géométrique de la multiplication, les deux facteurs du produit ne sont pas de même nature et l'on ne peut pas parler de commutativité de la multiplication qui suppose que les deux nombres appartiennent au même ensemble de départ .

ii) On *voit* bien dans la figure *infra* là où est la fausse problématique de l'APMEP en 1970-72 encore défendue par Brissiaud: ils disent « 2×3u c'et bien la même chose que 3× 2 u » , ce qui est tout à fait vrai mais le problème pédagogique principal pour l'élève est de savoir, dans la résolution de problèmes, pourquoi il fait une multiplication et, dans ce cas , il doit distinguer le nombre que l'on multiplie de celui qui est multiplié ce qui correspond visuellement au choix parmi les deux figures suivantes et , insister unilatéralement sur le fait que la multiplication est commutative " revient à dire " c'est pareil " et introduit même un obstacle à la compréhension de l'élève(le problème étant à mon avis résolu d'ailleurs si l'on n'emploie pas le mot commutatif, qui ne veut rien dire pour un élève, par l'énoncé de la propriété : *La valeur d'un produit ne change pas si l'on change l'ordre de ses facteurs*, qui n'est d'ailleurs pas la commutativité puisqu'elle valable pour plus de deux facteurs) :



III) Moins par moins égale plus

a) La « démonstration » par le calcul

La démonstration par le calcul passe par les étapes suivantes (les règles d'addition des relatifs étant supposées connues) :
- on identifie les relatifs positifs aux entiers : (+2)× (+3) = 2 × 3 = 6 = +6
- s'il n'y a qu'un nombre négatif dans le produit , on revient à la définition de la multiplication :
(-2)× (+3) = (-2)× 3 = (-2) + (-2) + (-2) = - 6
- le problème ne devient plus difficile que pour deux négatifs : dans ce cas , on dit que l'on veut garder les propriétés habituelles de la multiplication (*Pour multiplier une somme par un nombre, on multiplie chaque terme de la somme par ce nombre* ou même beaucoup plus simple en le présentant par l'angle du calcul mental *: 3 fois 32 est égal à 3 fois 30 plus 3 fois 2*). Et l'on doit avoir (-2)× [(+3) + (-3)] = (-2)× (+3) + (-2)× (-3)
mais
i) le premier membre de l'égalité vaut 0 car (-2)× [(+3) + (-3)] =(-2)× 0 = 0
ii) dans le deuxième membre, (-2) × (+3) = -6
On a donc 0 = (-6) + **(-2)× (-3)** et **(-2)× (-3)** doit valoir l'opposé de (- 6) , c'est-à-dire +6.

b) Construction géométrique

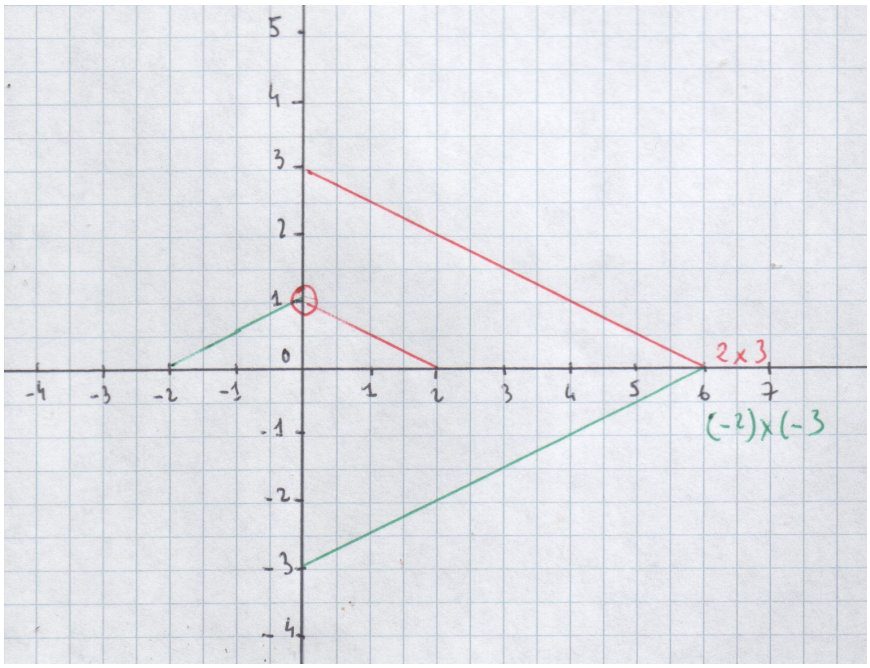
Une fois que l'on maîtrise la construction précédente, on peut introduire les nombres négatifs par symétrie sur les deux axes (ce qui correspond, dans la version calcul , à la définition des relatifs) et la multiplication des relatifs consiste à appliquer le même principe de construction que celui donné pour les nombres naturels (ce qui revient à maintenir, sans le dire, la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition).

La construction du produit $x \times y$ se traite de la manière suivante , I étant le point d'ordonnée (+1) de l'axe vertical, x le premier facteur pris sur l'axe horizontal au point M , y le second pris sur l'axe vertical au point N :

On trace la parallèle à (IM) passant par N ; elle coupe l'axe horizontal en P, point dont l'abscisse est le produit des nombres *x* et *y*.

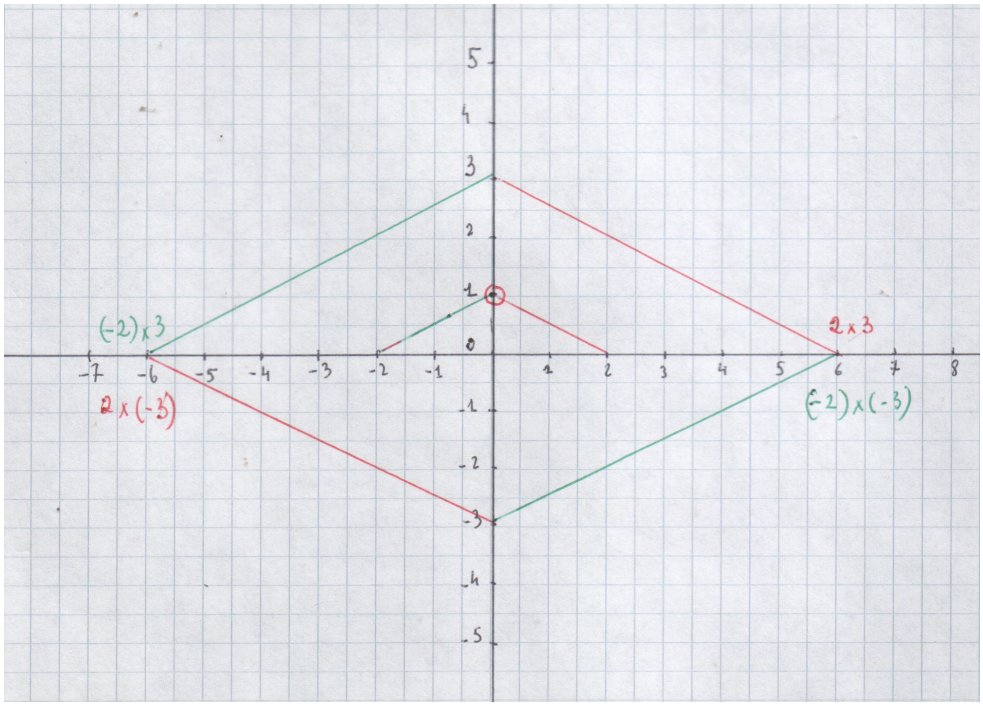
Ce qui donne,

1) pour le fameux – par – égal + dans le cas (-2)×(-3) et 2 × 3



2) Pour la règle complète des signes , *id est*

x	*y*	*x* × *y*
+ 2	+ 3	+ 6
+ 2	- 3	- 6
- 2	+ 3	- 6
- 2	- 3	- 6



MD, le 19/08/2005